Άσκηση 4679

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{a}{4}}$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

Προτεινόμενη Λύση

α) Θα πρέπει $x^2-x+\frac{a}{4}\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως $\Delta\leq 0$.
Άρα $\Delta=1-a\leq 0\Leftrightarrow a\geq 1$

β) i) Άρα $f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a}{4}}=\frac{1}{2}$,από όπου προκύπτει (υψώνοντας στο τετράγωνο), ότι $\alpha=1$

Αν $\alpha=1$τότε $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\left|x-\frac{1}{2}\right|$

ii) $f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\quad x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ή $x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, επομένως $x=0$ ή $x=1$

Άσκηση 4680

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (1)$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν χ_1, χ_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d\left(\chi_1, \chi_2\right) < 2$. (Μονάδες 9)

<u>Προτεινόμενη Λύση</u>

α) $\Delta = 1 - 4\left(\lambda - \lambda^2\right) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = \left(2\lambda - 1\right)^2 \geq 0$. Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(2\lambda - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι $\chi_1 = \dfrac{1 + \left(2\lambda - 1\right)}{2}, \quad \chi_2 = \dfrac{1 - \left(2\lambda - 1\right)}{2}$

Επομένως $\left|\chi_1 - \chi_2\right| = \left|\dfrac{1 + \left(2\lambda - 1\right)}{2} - \dfrac{1 - \left(2\lambda - 1\right)}{2}\right| = \left|2\lambda - 1\right|$

Όμως $0 < d\left(\chi_1, \chi_2\right) < 2 \Leftrightarrow 0 < \left|\chi_1 - \chi_2\right| < 2 \Leftrightarrow 0 < \left|2\lambda - 1\right| < 2$

Το $\left|2\lambda - 1\right| > 0$ ισχύει για κάθε $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$

Επίσης $\left|2\lambda - 1\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < 2\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < 2\lambda < 3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < \lambda < \dfrac{3}{2}$

Άρα $\lambda \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

<u>Άσκηση 4681</u>

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (1)$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και χ_1, χ_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d\left(\chi_1, \chi_2\right) = \frac{1}{d\left(\chi_1, \chi_2\right)}$. (Μονάδες 9)

<u>Προτεινόμενη Λύση</u>

α) $\Delta = 1 - 4\left(\lambda - \lambda^2\right) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = \left(2\lambda - 1\right)^2 \geq 0$. Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(2\lambda - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι $\chi_1 = \frac{1 + \left(2\lambda - 1\right)}{2}, \quad \chi_2 = \frac{1 - \left(2\lambda - 1\right)}{2}$

Επομένως $d\left(\chi_1, \chi_2\right) = \left|\chi_1 - \chi_2\right| = \left|\frac{1 + \left(2\lambda - 1\right)}{2} - \frac{1 - \left(2\lambda - 1\right)}{2}\right| = \left|2\lambda - 1\right|$

Άρα για $\lambda \neq \frac{1}{2}$ έχουμε

$$d\left(\chi_1, \chi_2\right) = \frac{1}{d\left(\chi_1, \chi_2\right)} \Leftrightarrow \left|2\lambda - 1\right| = \frac{1}{\left|2\lambda - 1\right|} \Leftrightarrow \left|2\lambda - 1\right|^2 = 1 \Leftrightarrow \left|2\lambda - 1\right| = 1$$

Επομένως $2\lambda - 1 = 1$ ή $2\lambda - 1 = -1$

Δηλαδή $\lambda = -1$ ή $\lambda = 0$

<u>Άσκηση 4682</u>

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(\chi) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

<u>Προτεινόμενη Λύση</u>

α) $\Delta = 1 - 4\left(\lambda - \lambda^2\right) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = \left(2\lambda - 1\right)^2 \geq 0$. Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(2\lambda - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) Θα πρέπει $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως $\Delta \leq 0$.

Όμως $\Delta = 1 - 4\left(\lambda - \lambda^2\right) = \left(2\lambda - 1\right)^2$

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \left(2\lambda - 1\right)^2 \leq 0 \quad \text{άρα} \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

<u>Άσκηση 4819</u>

Δίνεται το τριώνυμο $f(\chi) = x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και χ_1, χ_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $\chi_1 < \chi_2$, τότε :

i) Να δείξετε ότι $\chi_1 < \frac{\chi_1 + \chi_2}{2} < \chi_2$. (Μονάδες 4)

ii) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$f(\chi_2)$, $f\left(\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2}\right)$, $f(\chi_2+1)$ (Μονάδες 5)

Προτεινόμενη Λύση

α) $\Delta = 1-4\left(\lambda-\lambda^2\right) = 4\lambda^2-4\lambda+1 = \left(2\lambda-1\right)^2 \geq 0$. Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(2\lambda-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) i) $\chi_1 < \dfrac{\chi_1+\chi_2}{2} < \chi_2 \Leftrightarrow 2\chi_1 < \chi_1+\chi_2 < 2\chi_2$,

που προφανώς ισχύει αφού

$2\chi_1 < \chi_1+\chi_2 \Leftrightarrow \chi_1 < \chi_2$ και

$\chi_1+\chi_2 < 2\chi_2 \Leftrightarrow \chi_1 < \chi_2$

ii) Αφού χ_1, χ_2 είναι δύο άνισες ρίζες, το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

$f(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\chi_1, \chi_2\right)$ (Ετερόσημο του α)

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \chi_1\right) \cup \left(\chi_2, +\infty\right)$ (Ομόσημο του α)

και $f(\chi_1) = f(\chi_2) = 0$ (Συγνώμη, Δεν μπορώ να κάνω πίνακα προσήμων)

Άρα αφού $\chi_1 < \dfrac{\chi_1+\chi_2}{2} < \chi_2 \Rightarrow f\left(\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2}\right) < 0$

Επίσης $\chi_2+1 > \chi_2 \Rightarrow \left(\chi_2+1\right) \in \left(\chi_2, +\infty\right) \Rightarrow f\left(\chi_2+1\right) > 0$

Επομένως $f\left(\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2}\right) < f\left(\chi_2\right) = 0 < f\left(\chi_2+1\right)$